BAREM CLASA a IX-a

Problema 1.

Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale definit prin $a_{2k-1}=2k-1$ și $a_{2k}=a_k$, $\forall k\geq 1$.

a) Calculați $a_{2019}-4\cdot a_{2020}+a_{2048}$.

b) Să se arate că $a_1+a_2+...+a_n\geq \frac{n^2+2}{3}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Soluție:

a) Evident $a_{2019}=2019$ și $a_{2020}=a_{1010}=a_{505}=505$. Cum $2048=2^{11}$ rezultă că $a_{2048}=a_{1024}=...=a_2=a_1=1$. Atunci $a_{2019}-4\cdot a_{2020}+a_{2048}=2019-4\cdot 505+1=0$.

.... **1 punct**

b) Vom demonstra afirmația prin inducție. Cazul $n=1$ este evident: $a_1=1\geq \frac{1^2+2}{3}=1$.

.... **1 punct**

Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Presupunem că $a_1+a_2+...+a_m\geq \frac{m^2+2}{3}$ pentru orice $m\in\{1,2,...,n-1\}$ și vom demonstra că $a_1+a_2+...+a_n\geq \frac{n^2+2}{3}$.

Pentru $n=2k$ avem $a_1+a_2+...+a_n=(a_1+a_3+...+a_{2k-1})+(a_2+a_4+...+a_{2k})=$

$$=(1+3+...+2k-1)+(a_1+a_2+...+a_k)=k^2+(a_1+a_2+...+a_k)\geq k^2+\frac{k^2+2}{3}=\frac{4k^2+2}{3}=\frac{n^2+2}{3}.$$

.... **2 puncte**

Pentru $n=2k+1$ avem $a_1+a_2+...+a_{n-1}+a_n=(a_1+a_2+a_3+...+a_{2k})+a_{2k+1}\geq$

$$\geq\frac{4k^2+2}{3}+2k+1=\frac{4k^2+6k+5}{3}\geq\frac{(2k+1)^2+2}{3}=\frac{n^2+2}{3}$$, ceea ce trebuia arătat.

.... **2 puncte**

BAREM CLASA a IX-a

Problema 2.

Fie $a>0$ și $x,y\in[0,\infty)$ astfel încât $x^2+y^2=a^2$. Determinați valoarea maximă a expresiei

$$xy+a\cdot\max\{x,y\}.$$

Soluție:

Cum $x^2+y^2=a^2$ rezultă $x^2\le a^2$ și $y^2\le a^2$, deci $0\le x\le a$ și $0\le y\le a$.

.... **1 punct**

Fără a restrânge generalitatea putem presupune $0\le x\le y\le a$. Atunci $xy+a\cdot\max\{x,y\}=y(x+a)$.

.... **1 punct**

Avem succesiv: $y(x+a)$ este maxim $\Leftrightarrow$ $y^2(x+a)^2$ este maxim $\Leftrightarrow$ $(a^2-x^2)(x+a)^2$ este maxim

$\Leftrightarrow$ $(a-x)(a+x)^3$ este maxim $\Leftrightarrow$ $(a-x)\left(\dfrac{a+x}{3}\right)^3$ este maxim

.... **1 punct**

Deoarece $a-x+\dfrac{a+x}{3}+\dfrac{a+x}{3}+\dfrac{a+x}{3}=2a$, din inegalitatea mediilor deducem că produsul

$(a-x)\cdot\dfrac{a+x}{3}\cdot\dfrac{a+x}{3}\cdot\dfrac{a+x}{3}$ este maxim atunci când cele patru numere coincid, adică

$$a-x=\frac{a+x}{3}=\frac{a+x}{3}=\frac{a+x}{3}\qquad\left(=\frac{2a}{4}\right).$$

.... **2 puncte**

Obținem imediat $x=\dfrac{a}{2}$ și $y=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Maximul cerut este $\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

.... **1 punct**

BAREM CLASA a IX-a

Problema 3.

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și ABC un triunghi echilateral cu laturile de lungime n. Fiecare latură a triunghiului ABC se împarte în n segmente de lungime 1, iar prin capetele acestor segmente se duc paralele la laturile AB, BC, respectiv AC.

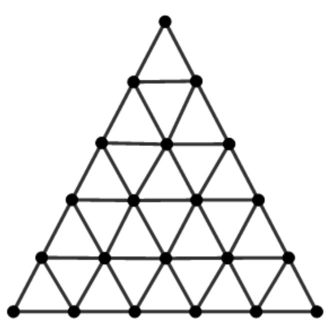
a) Arătați că prin acest procedeu suprafața triunghiului ABC se partiționează în n^2 triunghiuri echilaterale cu laturile de lungime 1.

b) Notăm cu V mulțimea tuturor vârfurilor acestor triunghiuri de latură 1 și fie $N = \text{card}(V)$. Demonstrați că N este divizibil cu 3 dacă și numai dacă n nu este divizibil cu 3.

c) Considerăm n nedivizibil cu 3. O treime din cele N puncte ale mulțimii V se colorează cu roșu, o treime cu galben și o treime cu albastru. Notăm $\overrightarrow{s_A} = \sum\limits_{M \in Vr} \overrightarrow{AM}$, unde suma se face după mulțimea Vr a vârfurilor roșii, $\overrightarrow{s_B} = \sum\limits_{M \in Vg} \overrightarrow{BM}$, unde suma se face după mulțimea Vg a vârfurilor galbene și $\overrightarrow{s_C} = \sum\limits_{M \in Va} \overrightarrow{CM}$, unde suma se face după mulțimea Va a vârfurilor albastre.

Să se arate că $\overrightarrow{s_A} + \overrightarrow{s_B} + \overrightarrow{s_C} = \vec{0}$.

Soluție:



a) Vom număra triunghiurile de latură 1 pe linii, de sus în jos.
Pe prima linie avem un triunghi, pe a doua linie avem trei triunghiuri, apoi cinci etc. Pe linia k avem k triunghiuri cu vârful în sus și $k-1$ triunghiuri cu vârful în jos, deci în total $2k-1$ triunghiuri. Așadar numărul triunghiurilor de latură 1 este

$$1+3+5+\ ...\ +(2n-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\cdot\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2$$

.. 1 punct

b) Numărând tot pe linii avem $N = \text{card}(V) = 1+2+3+\ ...\ +n+(n+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ și atunci:

$N \,\vdots\, 3 \Leftrightarrow (n+1)(n+2) \,\vdots\, 3 \Leftrightarrow (n+1) \,\vdots\, 3$ sau $(n+2) \,\vdots\, 3 \Leftrightarrow n$ nu se divide cu 3

.. 1 punct

BAREM CLASA a IX-a

c) Dacă notăm $\overrightarrow{r_P}$ vectorul de poziţie al punctului P avem $\overrightarrow{s_A}=\sum\limits_{M\in Vr}\overrightarrow{AM}=\sum\limits_{M\in Vr}\left(\overrightarrow{r_M}-\overrightarrow{r_A}\right)$, deci $\overrightarrow{s_A}=\sum\limits_{M\in Vr}\overrightarrow{AM}=\sum\limits_{M\in Vr}\left(\overrightarrow{r_M}-\overrightarrow{r_A}\right)=\sum\limits_{M\in Vr}\overrightarrow{r_M}-\frac{N}{3}\overrightarrow{r_A}$. Scriind relaţiile similare pentru $\overrightarrow{s_B}$ şi $\overrightarrow{s_C}$, obţinem:

$$\overrightarrow{s_A}+\overrightarrow{s_B}+\overrightarrow{s_C}=\sum_{M\in V}\overrightarrow{r_M}-\frac{N}{3}\left(\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}\right)=\sum_{M\in V}\overrightarrow{r_M}-N\cdot\overrightarrow{r_G}\ ,$$

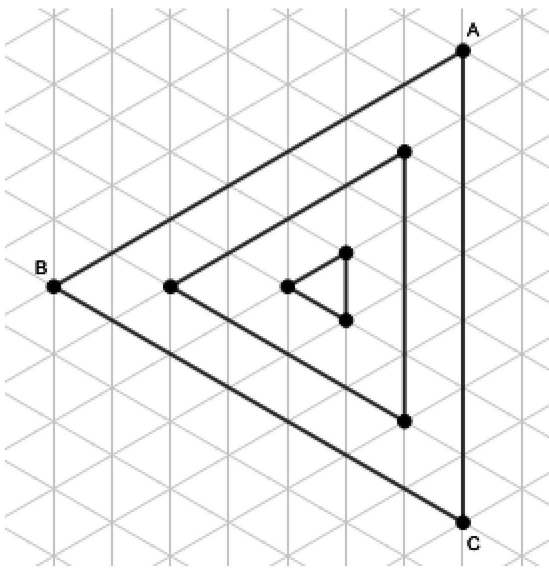
unde G este centrul de greutate al triunghiului ABC. Alegem originea vectorilor în G şi atunci $\overrightarrow{r_M}=\overrightarrow{GM}$, $\overrightarrow{r_G}=\vec{0}$, prin urmare rămâne să arătăm că $\sum\limits_{M\in V}\overrightarrow{GM}=\vec{0}$.

.. 2 puncte

Mulţimea V se partiţionează în triunghiuri cu laturile paralele cu ale triunghiului iniţial, ca în figură.

$$V=T_1\cup T_2\cup T_3\cup\ldots\ ,$$

unde T_1 conţine toate vârfurile din V care se găsesc pe laturile triunghiului ABC etc.



Toate aceste triunghiuri au acelaşi centru de greutate, G.

Avem $\sum\limits_{M\in V}\overrightarrow{GM}=\sum\limits_{M\in T_1}\overrightarrow{GM}+\sum\limits_{M\in T_2}\overrightarrow{GM}+\ldots \qquad (1)$

Cele $n+1$ vârfuri de pe latura $[AB]$ sunt simetric aşezate faţă de mijlocul său C' şi atunci C' este centrul de greutate al mulţimii vârfurilor de pe latura $[AB]$ astfel că

$$\sum_{M\in[AB]}\overrightarrow{GM}=(n+1)\overrightarrow{GC'}\ .$$

Analog pentru laturile $[BC]$ şi $[CA]$, prin urmare

$$\sum_{M\in T_1}\overrightarrow{GM}=(n+1)\left(\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}\right)-\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)=\vec{0}$$

(căci vârfurile A,B,C au fost puse de două ori).

Similar se demonstrează că pentru orice triunghi T_k suma este $\vec{0}$ şi atunci din relaţia (1) obţinem

$$\sum_{M\in V}\overrightarrow{GM}=\sum_{M\in T_1}\overrightarrow{GM}+\sum_{M\in T_2}\overrightarrow{GM}+\ldots=\vec{0}\ .$$

.. 2 puncte

BAREM CLASA a X-a

Problema 1.

Fie a și b două numere reale de același semn și z un număr complex astfel încât $\operatorname{Re}\left(\frac{a+zi}{b+z}\right)=0$ și $\operatorname{Im}\left(\frac{a+z}{b+zi}\right)=0$. Să se arate că $|z|=\sqrt{ab}$.

Soluție:

Avem $\operatorname{Re}\left(\frac{a+zi}{b+z}\right)=0 \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{a+zi}{b+z}\right)}+\frac{a+zi}{b+z}=0 \Leftrightarrow \frac{a-\overline{z}i}{b+\overline{z}}+\frac{a+zi}{b+z}=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (a-\overline{z}i)(b+z)+(a+zi)(b+\overline{z})=0 \Leftrightarrow 2ab+a(z+\overline{z})+bi(z-\overline{z})=0 \qquad (1)$$

.. 2 puncte

Analog $\operatorname{Im}\left(\frac{a+z}{b+zi}\right)=0 \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{a+z}{b+zi}\right)}=\frac{a+z}{b+zi} \Leftrightarrow \frac{a+\overline{z}}{b-\overline{z}i}-\frac{a+z}{b+zi}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a+\overline{z})(b+zi)-(a+z)(b-\overline{z}i)=0 \Leftrightarrow 2i|z|^2+ai(z+\overline{z})-b(z-\overline{z})=0$ (înmulțim cu i) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -2|z|^2-a(z+\overline{z})-bi(z-\overline{z})=0 \qquad (2)$$

.. 2 puncte

Adunând egalitățile (1) și (2) obținem $2\left(ab-|z|^2\right)=0$, de unde rezultă că $|z|^2=ab$, adică $|z|=\sqrt{ab}$.

.. 2 puncte

BAREM CLASA a X-a

Problema 2.

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se găsească toate numerele reale x care verifică relația:

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)^x+\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)^x\right)=2(n+1)^2 .$$

Soluție:

Deoarece $\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)=1$, egalitatea din enunț devine

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)^x+\frac{1}{\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)^x}\right)=2(n+1)^2$$

Notând $f_k(x)=\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)^x+\dfrac{1}{\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)^x}$, relația de mai sus se scrie

$$2+\sum_{k=1}^{n}f_k(x)=2(n+1)^2 \quad\Leftrightarrow\quad F(x)=2(n+1)^2-2 \text{ , unde } F(x)=\sum_{k=1}^{n}f_k(x).$$

.... **2 puncte**

Funcțiile f_k sunt funcții de forma $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=a^x+\dfrac{1}{a^x}$, unde $a>1$.

Pentru $0\le x_1<x_2$ avem $f(x_2)-f(x_1)=\left(a^{x_2}-a^{x_1}\right)\left(1-\dfrac{1}{a^{x_1+x_2}}\right)>0$, deci funcția f este strict crescătoare pe intervalul $[0,\infty)$. Deoarece o sumă de funcții strict crescătoare este funcție strict crescătoare, rezultă că funcția F este strict crescătoare pe intervalul $[0,\infty)$, deci ecuația $F(x)=2(n+1)^2-2$ are cel mult o soluție în intervalul $[0,\infty)$.

Observăm că $F(2)=\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)^2+\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)^2\right)=2\cdot\sum_{k=1}^{n}(2k+1)=2(n+1)^2-2$, deci $x=2$ este unica soluție din intervalul $[0,\infty)$.

.... **2 puncte**

Pentru $x_1<x_2<0$ avem $f(x_2)-f(x_1)=\left(a^{x_2}-a^{x_1}\right)\left(1-\dfrac{1}{a^{x_1+x_2}}\right)<0$, deci funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty,0)$. Deoarece o sumă de funcții strict descrescătoare este funcție strict descrescătoare, rezultă că funcția F este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty,0)$, deci ecuația $F(x)=2(n+1)^2-2$ are cel mult o soluție în intervalul $(-\infty,0)$.

Observăm că $F(-2)=\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)^{-2}+\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)^{-2}\right)=2\cdot\sum_{k=1}^{n}(2k+1)=2(n+1)^2-2$, deci $x=-2$ este unica soluție din intervalul $(-\infty,0)$.

.... **2 puncte**

BAREM CLASA a X-a

Problema 3.

Fie n un număr natural nenul și $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea

$$f(1+x)=f(1-x),\ \forall x\in\mathbb{R}$$

astfel ca ecuația $f(x)=0$ are exact n soluții distincte: $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze suma $x_1+x_2+\ldots+x_n$.

b) Dați exemplu de astfel de funcție.

Soluție:

a) Dacă $f(a)=0$, atunci

$$0=f(a)=f(1+(a-1))=f(1-(a-1))=f(2-a),$$

deci și $2-a$ este soluție a ecuației $f(x)=0$.

.. 2 puncte

Dacă $a=2-a$ atunci $a=1$.

Dacă $a\neq 1$ atunci $a\neq 2-a$ și soluțiile diferite de 1 ale ecuației $f(x)=0$ se grupează în perechi de forma $(a,2-a)$ cu suma 2.

În concluzie, avem $x_1+x_2+\ldots+x_n=n$.

.. 2 puncte

b) Pentru n par, $n=2k$, considerăm mulțimea $A=\{-k+1,-k+2,\ldots,-2,-1,0,2,3,\ldots,k,k+1\}$ și definim funcția f astfel: $f(x)=\begin{cases}0, & x\in A\\ 1, & x\in\mathbb{R}\setminus A\end{cases}$.

Pentru n impar, $n=2k+1$, considerăm mulțimea $B=\{-k+1,-k+2,\ldots,-2,-1,0,1,2,3,\ldots,k,k+1\}$ (de fapt $B=A\cup\{1\}$) și definim funcția f astfel: $f(x)=\begin{cases}0, & x\in B\\ 1, & x\in\mathbb{R}\setminus B\end{cases}$.

Se verivică imediat că funcțiile de mai sus satisfac condițiile din enunț.

.. 2 puncte

BAREM CLASA a XI-a

Problema 1.

Fie $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $AB = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$. Dacă există $k \in \mathbb{N},\ k \geq 2$ astfel încât $(AB)^k = (BA)^k$, demonstrați că $AB = BA$.

Soluție:

Dacă $X \in M_2(\mathbb{R})$ atunci $X^2 = (\mathrm{Tr}(X)) \cdot X - (\det(X)) \cdot I_2$. Inductiv se arată că, $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ avem $X^n = a_n \cdot X + b_n \cdot I_2$, unde $(a_n)_{n\geq 1}$ și $(b_n)_{n\geq 1}$ satisfac relațiile de recurență

(1) $a_{n+1} = a_2 \cdot a_n + b_n$, $b_{n+1} = a_n \cdot b_2$ cu $a_2 = \mathrm{Tr}(X),\ b_2 = -\det(X)$.

…………………………………………………………………………………………... **2 puncte**

Luând în (1) $X = AB$, obținem $(AB)^n = a_n(AB) + b_n \cdot I_2$ unde

$a_2 = \mathrm{Tr}(AB) = 16,\ b_2 = -\det(AB) = -10$ și $a_{n+1} = 16 \cdot a_n + b_n$, $b_{n+1} = -10 \cdot a_n$

Luând în (1) $X = BA$, obținem $(BA)^n = a_n'(BA) + b_n' \cdot I_2$ unde

$a_2' = \mathrm{Tr}(BA) = \mathrm{Tr}(AB) = 16,\ b_2' = -\det(BA) = -\det(AB) = -10$ și $a_{n+1}' = 16 \cdot a_n' + b_n'$, $b_{n+1}' = -10 \cdot a_n'$

Șirurile $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, $(a_n')_{n\geq 1}$ și $(b_n')_{n\geq 1}$ satisfac relații de recurență identice cu condiții inițiale identice: $a_2 = a_2'$ și $b_2 = b_2'$. Atunci $a_n = a_n'$ și $b_n = b_n'$, $\forall n \geq 2$.

…………………………………………………………………………………………... **2 puncte**

Cum $(AB)^k = (BA)^k$ rezultă că $a_k(AB) = a_k(BA)$, iar dacă $a_k \neq 0$ obținem $AB = BA$.

…………………………………………………………………………………………... **1 punct**

Dacă $a_k = 0$, atunci $(AB)^k = b_k I_2$, adică matricea $(AB)^k$ are elementele de pe diagonala secundară egale cu 0. Cum $AB = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 9 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $(AB)^k$ are toate elementele strict pozitive, absurd !

…………………………………………………………………………………………... **1 punct**

BAREM CLASA a XI-a

Problema 2.

Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin relația de recurență $a_1 = 1$ și $a_{n+1} = a_n + 1 + \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$, $\forall n \geq 1$.

Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 2$.

Soluție:

Relația de recurență se poate scrie sub forma $a_{n+1}^{\ 2} - (a_n + 1)a_{n+1} - a_n = 0$, $\forall n \geq 1$ adică a_{n+1} este soluție a ecuației de gradul al doilea $x^2 - (a_n + 1)x - a_n = 0$. Această ecuație are soluții reale dacă și numai dacă $\Delta = a_n^{\ 2} + 6a_n + 1 \geq 0$, adică pentru orice $n \geq 1$ trebuie să avem

$$(1) \qquad a_n \leq -3 - 2\sqrt{2} \quad \text{sau} \quad a_n \geq -3 + 2\sqrt{2}.$$

.... **2 puncte**

Vom demonstra prin inducție că $a_n \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Evident $a_1 = 1 \geq 1$. Presupunem că $a_n \geq n$ și demonstrăm că $a_{n+1} \geq n + 1$. Cum a_{n+1} este soluție a ecuației $x^2 - (a_n + 1)x - a_n = 0$ rezultă că

$$(2) \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + 1 \pm \sqrt{a_n^{\ 2} + 6a_n + 1}}{2}.$$

Deoarece $a_n \geq n$ avem $\dfrac{a_n + 1 - \sqrt{a_n^{\ 2} + 6a_n + 1}}{2} > -3 - 2\sqrt{2} \Leftrightarrow a_n + 7 + 4\sqrt{2} > \sqrt{a_n^{\ 2} + 6a_n + 1}$ ceea ce este adevărat pentru că $a_n + 7 + 4\sqrt{2} > a_n + 3 = \sqrt{a_n^{\ 2} + 6a_n + 9} > \sqrt{a_n^{\ 2} + 6a_n + 1}$.

Similar avem $\dfrac{a_n + 1 - \sqrt{a_n^{\ 2} + 6a_n + 1}}{2} < -3 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow a_n + 7 - 4\sqrt{2} < \sqrt{a_n^{\ 2} + 6a_n + 1}$, ceea ce este adevărat pentru că $a_n + 7 + 4\sqrt{2} < a_n + 2 = \sqrt{a_n^{\ 2} + 4a_n + 4} < \sqrt{a_n^{\ 2} + 6a_n + 1}$.

Așadar $\dfrac{a_n + 1 - \sqrt{a_n^{\ 2} + 6a_n + 1}}{2} \in \left(-3 - 2\sqrt{2}, -3 + 2\sqrt{2}\right)$ și atunci relațiile (1) și (2) conduc la

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 1 + \sqrt{a_n^{\ 2} + 6a_n + 1}}{2} \geq \frac{a_n + 1 + \sqrt{a_n^{\ 2} + 2a_n + 1}}{2} \geq a_n + 1 \geq n + 1 \text{, adică } a_{n+1} \geq n + 1.$$

.... **2 puncte**

Relația de recurență se poate scrie sub forma

$a_{n+1} - a_n + 1 - \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = 2$, $\forall n \geq 1$ sau $(a_{n+1} - a_n)\left(1 + \dfrac{1}{a_{n+1}}\right) = 2$, $\forall n \geq 1$ și de aici rezultă că

$$(3) \qquad a_{n+1} - a_n = \frac{2}{1 + \dfrac{1}{a_{n+1}}}, \ \forall n \geq 1.$$

Cum $a_n \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_{n+1}} = 0$, iar din relația (3) rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 2$.

.... **2 puncte**

BAREM CLASA a XI-a

Problema 3.

a) Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale strict pozitive cu proprietatea că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc inegalitatea $a_1 + a_2 + ... + a_n \leq n^2$. Demonstrați că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+ ... +\frac{1}{a_n}\right)=\infty$.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+ ... +\frac{1}{2n-1}\right)$.

Soluție:

a) Considerăm șirul $(b_n)_{n\geq 1}$, $b_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+ ... +\frac{1}{a_n}$. Deoarece $b_{n+1}-b_n=\frac{1}{a_{n+1}}>0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ rezultă că șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător, deci șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ are limită.

.. 2 puncte

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l,\ l\in\mathbb{R}$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} b_{2n} = l$ și $\lim\limits_{n\to\infty}(b_{2n}-b_n)=l-l=0$.

.. 1 punct

Dar $b_{2n}-b_n=\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_{n+2}}+ ... +\frac{1}{a_{2n}} \geq \frac{n^2}{a_{n+1}+a_{n+2}+...+a_{2n}} \geq \frac{n^2}{a_1+a_2+...+a_{2n}} \geq \frac{n^2}{(2n)^2}=\frac{1}{4}$,

adică $b_{2n}-b_n\geq\frac{1}{4},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Prin trecere la limită obținem $0\geq\frac{1}{4}$, absurd! Rămâne $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty$.

.. 2 puncte

b) Considerăm șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n=2n-1$. Avem $a_1+a_2+...+a_n=1+3+5+ ... +(2n-1)=n^2\leq n^2$ și conform punctului a) obținem $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+ ... +\frac{1}{2n-1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+ ... +\frac{1}{a_n}\right)=\infty$.

.. 1 punct

BAREM CLASA a XII-a

Problema 1.

Fie $(G,\cdot)$ un grup și $a,b,c\in G$ astfel încât $ab^2=c$ și $cb^3=a$.

a) Dacă grupul G are 2019 elemente, arătați că $a=c$.

b) Rămâne valabil rezultatul de la punctul **a)** dacă grupul G are 2020 elemente?

Soluție: **a)**

$ab^2=c \Rightarrow (cb^3)b^2=c \Rightarrow cb^5=c \Rightarrow b^5=e$, unde e este elementul neutru din grupul G.

.. 2 puncte

Cum $b^5=e \Rightarrow \operatorname{ord}(b)/5$. Pe de altă parte, $\operatorname{ord}(b)\,/\,\operatorname{ord}(G)$, deci $\operatorname{ord}(b)\,/$ c.m.m.d.c.$(5,2019)$, adică $\operatorname{ord}(b)=1$ de unde rezultă $b=e$. Atunci $ab^2=c$ implică $ae^2=c$, adică $a=c$.

.. 2 puncte

b) Răspunsul este negativ. De exemplu, în grupul $(\mathbb{Z}_{2020},+)$ relațiile din ipoteză se scriu astfel: $\hat{a}+2\hat{b}=\hat{c}$ și $\hat{c}+3\hat{b}=\hat{a}$. Luând $a=1212$, $b=404$ și $c=0$ obținem contraexemplul.

.. 2 puncte

Problema 2.

a) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție care verifică relația $(f(x))^{2019}+f(x)-x=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Demonstrați că funcția f admite primitive.

b) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție care verifică relația $(f(x))^{2019}-f(x)+x=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Demonstrați că funcția f nu admite primitive.

Soluție :

a) Dacă notăm $g(x)=x^{2019}+x$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. atunci relația din enunț devine $g\circ f=1_{\mathbb{R}}$

Cum g este bijectivă $\Rightarrow f=g^{-1}$. Cum g este continuă $\Rightarrow f$ este continuă $\Rightarrow$ f are primitive.

.. 3 puncte

b) Dacă notăm $h(x)=x-x^{2019}$, $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $h\circ f=1_{\mathbb{R}}$ $\Rightarrow f$ este injectivă și h este surjectivă. Să presupunem prin reducere la absurd că f admite primitive. Atunci f are proprietatea lui Darboux, prin urmare $f(\mathbb{R})=I$ unde I este un interval inclus în $\mathbb{R}$.

Deoarece $h\circ f=1_{\mathbb{R}}$ avem $(h\circ f)(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, adică $h(I)=\mathbb{R}$. Analizând tabelul de variație al funcției h deducem că $I=\mathbb{R}$, adică f este surjectivă. Cum f este și injectivă deducem că f este inversabilă. Dar atunci $h=f^{-1}$, deci h este funcție injectivă, absurd! (de exemplu $h(0)=h(1)$).

.. 3 puncte

BAREM CLASA a XII-a

Problema 3.

a) Arătați că pentru orice $a>1$ avem $\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{\ln x}{x^2+1}dx=0$.

b) Să se arate că $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\ln n}\cdot\int_{1}^{n}\frac{\ln x}{x^2+n}dx=\frac{\pi}{4}$.

Soluție:

a) Notăm $I=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{\ln x}{x^2+1}dx$. Cu schimbarea de variabilă $x=\frac{1}{y},\ dx=-\frac{1}{y^2}dy$ avem:

$$I=\int_{a}^{\frac{1}{a}}\frac{\ln\frac{1}{y}}{\frac{1}{y^2}+1}\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)dy=-\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{\ln y}{y^2+1}dy=-I.$$ Cum $I=-I$ rezultă că $I=0$.

.... **2 puncte**

b) Cu schimbarea de variabilă $x=y\sqrt{n},\ dx=\sqrt{n}\,dy$ avem:

$$\int_{1}^{n}\frac{\ln x}{x^2+n}dx=\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\sqrt{n}}\frac{\ln\left(y\sqrt{n}\right)}{n\left(y^2+1\right)}\cdot\sqrt{n}\,dy=\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\sqrt{n}}\frac{\ln y}{y^2+1}dy+\frac{\ln\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\cdot\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\sqrt{n}}\frac{1}{y^2+1}dy.$$

.... **2 puncte**

De la punctul **a)** știm că $\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\sqrt{n}}\frac{\ln y}{y^2+1}dy=0$, deci $\int_{1}^{n}\frac{\ln x}{x^2+n}dx=\frac{\ln\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\cdot\left(\operatorname{arctg}\sqrt{n}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

.... **1 punct**

Limita devine $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\ln n}\cdot\int_{1}^{n}\frac{\ln x}{x^2+n}dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{n}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\frac{\pi}{4}$.

.... **1 punct**